

ЛЕКЦИЯ 1

Теорема Рао-Блекуэлла-Колмогорова. Оптимальность оценок, являющихся функцией полной достаточной статистики

Теорема [К. Р. Рао, Д. Блекуэлл, А. Н. Колмогоров]. Пусть $T(X)$ — достаточная статистика выборки $X_1, \dots, X_n$. Тогда, если существует оптимальная оценка $T_1(X)$ для функции $\tau(\theta)$, то она является функцией достаточной статистики, т.е. существует борелевская функция $\varphi(t)$ такая, что $T_1(X) = \varphi(T(X))$.

Доказательство. Идея доказательства заключается в том, что для любой несмещенной оценки мы построим несмещенную оценку, являющуюся функцией от достаточной статистики, которая имеет меньшую дисперсию. Пусть $T_1(X)$ — некоторая несмещенная оценка функции $\tau(\theta)$. Обозначим $T_2(X) = \mathbf{E}_\theta(T_1(X)|T(X))$. Поскольку $T(X)$ — достаточная статистика, то $T_2(X)$ не зависит от θ и, следовательно, является статистикой, и может служить точечной оценкой функции $\tau(\theta)$. Напомним свойства условного математического ожидания, которые нам понадобятся для доказательства теоремы:

$\mathbf{E}(\mathbf{E}(\xi|\eta)) = \mathbf{E}\xi$, $\mathbf{E}(\xi\eta|\zeta) = \xi \mathbf{E}(\eta|\zeta)$, если ξ измерима относительно σ -алгебры, порожденной случайной величиной ζ . Существует борелевская функция $\varphi(t)$ такая, что $\mathbf{E}(\xi|\eta) = \varphi(\eta)$.

Имеем

$$\mathbf{E}_\theta T_2(X) = \mathbf{E}_\theta(\mathbf{E}_\theta(T_1(X)|T(X))) = \mathbf{E}_\theta T_1(X),$$

следовательно, $T_2(X)$ также является несмещенной оценкой $\tau(\theta)$. Далее,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_\theta T_1(X) &= \mathbf{E}_\theta(T_1(X) - \tau(\theta))^2 = \mathbf{E}_\theta(T_1(X) - T_2(X) + T_2(X) - \tau(\theta))^2 = \\ &= \mathbf{E}_\theta(T_1(X) - T_2(X))^2 + 2\mathbf{E}_\theta((T_1(X) - T_2(X))(T_2(X) - \tau(\theta))) + \mathbf{D}_\theta T_2(X). \end{aligned}$$

Второе слагаемое полученного выражения равно нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta((T_1(X) - T_2(X))(T_2(X) - \tau(\theta))) &= \mathbf{E}_\theta(T_1(X) - T_2(X))T_2(X) - \tau(\theta)\mathbf{E}_\theta(T_1(X) - T_2(X)) = \\ &= \mathbf{E}_\theta T_1(X)T_2(X) - \mathbf{E}_\theta T_2^2(X), \end{aligned}$$

а поскольку $\mathbf{E}_\theta(T_1(X)|T(X))$ измерима относительно $\sigma(T(X))$ — σ -алгебры, порождаемой случайной величиной $T(X)$, то

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_\theta T_1(X)T_2(X) &= \mathbf{E}_\theta(T_1(X)\mathbf{E}_\theta(T_1(X)|T(X))) = \mathbf{E}_\theta(\mathbf{E}_\theta((T_1(X)\mathbf{E}_\theta(T_1(X)|T(X)))|T(X))) = \\ &= \mathbf{E}_\theta(\underbrace{\mathbf{E}_\theta(T_1(X)|T(X))}_{T_2(X)})\underbrace{\mathbf{E}_\theta(T_1(X)|T(X))}_{T_2(X)}) = \mathbf{E}_\theta T_2^2(X), \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\mathbf{E}_\theta(T_1(X) - T_2(X))^2 \geq 0 \Rightarrow \mathbf{D}_\theta T_1(X) \geq \mathbf{D}_\theta T_2(X),$$

причём равенство достигается тогда и только тогда, когда $T_1(X) - T_2(X) = 0$ с вероятностью 1. Осталось заметить, что оценка $T_2(X)$ является функцией $T(X)$.

Теорема доказана.

Замечание. Из доказанной теоремы следует, что при наличии нетривиальной достаточной статистики оптимальную оценку нужно искать только в виде функции от достаточной статистики. Однако ответа на вопрос о существовании оптимальной оценки она не дает.

Теорема [А. Н. Колмогоров]. Пусть $T(X)$ — полная достаточная статистика. Тогда $\varphi(T(X))$ оптимально оценивает $\tau(\theta)$ тогда и только тогда, когда

$$\mathbf{E}_\theta \varphi(T(X)) = \tau(\theta),$$

То есть $\varphi(T(X))$ — несмещённая.

Доказательство. Из доказательства теоремы Рао-Блекуэлла-Колмогорова следует, что если существует хотя бы одна несмещенная оценка, то существует и несмещенная оценка зависящая только от достаточной статистики. Пусть $T_1(X) = \varphi_1(T(X))$ — несмещённая оценка $\tau(\theta)$ и $T(X)$ — полная достаточная статистика. Предположим, что существует другая несмещённая оценка $T_2(X) = \varphi_2(T(X))$. В этом случае для любого θ

$E_\theta(\varphi_1(T(X)) - \varphi_2(T(X))) = 0 \Rightarrow$ и, в силу полноты статистики $T(X)$, $\varphi_1(x) - \varphi_2(x) = 0$ почти всюду по распределению $T(X)$. Таким образом, несмещенная оценка, являющаяся функцией от полной достаточной статистики, единственна. А так как она имеет меньшую дисперсию по сравнению с другими несмещенными оценками, то она является оптимальной оценкой. Теорема доказана.

Примеры. 1. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\theta)$. Оценим функцию $\tau(\theta) = \theta^2$. Статистика

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}(n\theta)$$

является полной достаточной статистикой. Обозначив $\sum_{i=1}^n X_i = \xi$, рассмотрим статистику

$$T_1(X) = \frac{\xi(\xi-1)}{\psi(n)}.$$

Найдём функцию $\psi(n)$ из условия несмещённости $T_1(X)$:

$$E_\theta \frac{\xi(\xi-1)}{\psi(n)} = \frac{1}{\psi(n)} (E_\theta \xi^2 - E_\theta \xi) = \frac{1}{\psi(n)} (n^2 \theta^2 + n\theta - n\theta) = \frac{n^2}{\psi(n)} \theta^2,$$

откуда очевидно, что достаточно положить $\psi(n) = n^2$:

$$E_\theta T_1(X) = \frac{1}{n^2} \left(E_\theta \left(\sum_{i=1}^n X_i \right)^2 - E_\theta \left(\sum_{i=1}^n X_i \right) \right) = \frac{1}{n^2} (n^2 \theta^2 + n\theta - n\theta) = \theta^2.$$

Следовательно, в силу теоремы Колмогорова $T_1(X)$ — оптимальная оценка $\tau(\theta) = \theta^2$. Теорему Колмогорова можно использовать и для доказательства того, что не существует оптимальной оценки некоторых функций от неизвестного параметра.

Пример 2. $X_1, \dots, X_n \sim \text{Pois}(\theta)$. Оценим функцию $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$. Функция

$$T(X) = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Pois}(n\theta)$$

является полной достаточной статистикой. Предположим, $T_1(X)$ — оптимальная оценка. Тогда в силу теоремы Колмогорова она является функцией полной достаточной статистики $T_1(X) = \varphi(T(X))$. Из несмещенности оптимальной оценки следует, что,

$$E_\theta \varphi(T(X)) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) e^{-n\theta} \frac{(n\theta)^k}{k!} = \frac{1}{\theta} \quad \forall \theta > 0 \Leftrightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \varphi(k) \frac{n^k}{k!} \theta^{k+1} = e^{n\theta} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{n^j}{j!} \theta^j \quad \forall \theta > 0.$$

В левой части последнего равенства стоит степенной ряд с коэффициентом при нулевой степени равным 0, а в правой части равным единице, причём эти степенные ряды тождественно равны на положительной полуоси. Но в силу теоремы о единственности степенного ряда такие ряды должны совпадать (то есть у них должны совпадать коэффициенты

при всех степенях θ). Полученное противоречие доказывает, что для функции $\tau(\theta) = \frac{1}{\theta}$ в данном случае не существует оптимальной оценки.